جامعة البعث: ....

كليتي العلوم في حمص وفي تدمر

حل بعض التمارين الهامة

السؤال الأول: صنّف المصفوفات التالية؛ بحسب انتمائها إلى كل من المجموعات:

(١). ذات الشكل المثلثي، (٢). المتناظرة، (٣). المتناظرة عكسياً، (٤). الهرميتية، (٥). الهرميتية عكسياً.

$$A_1=\begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 1\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad A_3=\begin{bmatrix}0 & 2i\\ 2i & 2i\end{bmatrix},\quad A_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ i & 0\end{bmatrix},\quad A_5=\begin{bmatrix}0 & -1+i\\ 1-i & 0\end{bmatrix}$$

الجواب:

(١). ذات الشكل المثلثي: A_4 (٢). المتناظرة: A_2 , A_3 (٣). المتناظرة عكسياً: A_1 , A_5

(٤). الهرميتية: A_1 (٥). الهرميتية عكسياً: A_3 !

السؤال الثاني: لتكن المصفوفتان:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 8 & 3 & 5\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

والمطلوب، أوجد كلاً من:

$$(١).\ |A|\ ,\quad (٢).\ |A^{100}|\ ,\quad (٣).\ |A+A+A|\ ,\quad (٤).\ |A^{-1}|$$

الجواب:

(1). $|A| = 5+0+0-0-0-6 = -1$

(2). $|A+A+A| = |3A| = 3^3 \cdot |A| = 27 \cdot (-1) = -27$

(3). $|A^{100}| = (|A|)^{100} = (-1)^{100} = 1$

(4). $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{-1} = -1$

السؤال الثالث: أوجد مقلوب المصفوفة A باستخدام التحويلات الأولية .

الجواب:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3+8r_1]{r_2-9r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 8 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3-3r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 35 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2+2r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 61 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 35 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 61 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -35 & 3 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 61 & -5 & 2 \\ -35 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

السؤال الرابع: حلّ المعادلة المصفوفية التالية:

$$AX - A = 2I$$

الجواب:

$$AX - A = 2I \Rightarrow$$

$$X - I = 2A^{-1} \Rightarrow$$

$$X = 2A^{-1} + I$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 122 & -10 & 4 \\ -70 & 6 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 122 & -9 & 4 \\ -70 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

السؤال الخامس: أوجد المصفوفة C التي من أجلها يكون :

$$(A \cdot C)^T = B^T$$

$(A \cdot C)^T = B^T$

Scanned by CamScanner

الجواب:

$$(AC)^T = B^T \Rightarrow AC = B \Rightarrow C = A^{-1}.B \Rightarrow$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 61 & -5 & 2 \\ -35 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 71 & -1 & 51 \\ -41 & 1 & -29 \end{bmatrix}$$

السؤال السادس: أوجد إشارة الجداء $a_{35} . a_{13} . a_{42} . a_{54} . a_{21}$ في معين من المرتبة الخامسة.

الجواب:

لإيجاد إشارة الجداء $a_{35} . a_{13} . a_{42} . a_{54} . a_{21}$ في معين من المرتبة الخامسة نرتب مضاريب هذا الجداء وفق الترتيب الطبيعي للأسطر ، أي على الشكل:

$$a_{13} . a_{21} . a_{35} . a_{42} . a_{54}$$

فتكون إشارة هذا الجداء موجبة إذا كانت متبادلة أدلة أعمدته زوجية ، وتكون إشارته سالبة إذا كانت متبادلة أدلة أعمدته فردية.

إن متبادلة أدلة أعمدة الجداء هي:

(3.1.5.2.4)

$$(3\ 1\ 5\ 2\ 4)$$

وهي زوجية لأن عدد انعكاساتها عدد زوجي وهو 4 . بالتالي فإشارة هذا الجداء هي $(+)$.

السؤال السابع: لتكن الجملتان $A=\{v=2+3i\ ,\ u=-4-6i\}, B=\{v=-6-2i\ ,\ u=-3-4i\}$. والمطلوب:

بيّن، مع التعليل، أياً من الجملتين السابقتين هي جملة مستقلة خطياً وأياً منهما هي جملة مرتبطة خطياً.

الجواب:

الجملة $A=\{v=-1+i\ ,\ u=-3+3i\}$ مرتبطة خطياً لأن الشعاعين v , u والمكونين لهذه الجملة هما شعاعان متناسبان وذلك لأن:

$$v = (\frac{1}{3}).\ u\ ;\ \frac{1}{3} \in R$$

في حين ان الجملة $B=\{v=-1-i\ ,\ u=-2-4i\}$، مستقلة خطياً لأن الشعاعين v , u والمكونين لهذه الجملة هما شعاعان غير متناسبان وذلك لأنه لا يوجد عدد حقيقي $\alpha \in R$ بحيث يكون :

$$v = \alpha.\ u$$

$d(0)=0$

لأن أكبر جملة مستقلة خطياً في هذا الفضاء هي مجموعة الخالية φ والتي عدد أشعتها ...

4

السؤال الثامن: عرّف قياس الفضاء الشعاعي، ثم حدّد قياس (بعد) كلّ من الفضاءات التالية (مع التعليل):

(١). الفضاء الشعاعي C المعرّف فوق حقل الأعداد الحقيقية R . (٢). الفضاء الشعاعي الصفري $\{\theta\}$.

(٣). الفضاء الشعاعي $M_{2\times 3}(R)$. (٤). فضاء كل كثيرات الحدود المعرّفة فوق حقل الأعداد الحقيقية R والتي درجة كلّ منها أصغر أو يساوي 3 . (٥). الفضاء الشعاعي R^3 .

الجواب: قياس الفضاء الشعاعي يساوي عدد أشعة أكبر جملة مستقلة خطياً في هذا الفضاء، (أو يساوي عدد أشعة قاعدته) .

(١). قياس الفضاء الشعاعي C المعرف فوق حقل الأعداد الحقيقية R يساوي 2 لأن هذا الفضاء الشعاعي يملك القاعدة i , 1 . (٢). قياس الفضاء الشعاعي C المعرف فوق حقل الأعداد العقدية C يساوي 1 لأنه يمكن إيجاد جملة مكوّنة من شعاع واحد $v \neq \theta$ المستقلة خطياً ، في حين أن كل جملة مكونة من شعاعين في هذا الفضاء هي جملة مرتبطة خطياً.

(٣). قياس الفضاء الشعاعي $M_{3\times 4}(R)$ يساوي 12 لأن هذا الفضاء يملك القاعدة:

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, A_3=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A_4=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, A_5=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad , A_{12}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

(٤). قياس فضاء كل كثيرات الحدود المعرّفة فوق حقل الأعداد الحقيقية R والتي درجة كلّ منها أصغر أو يساوي 5 ؟ يساوي 6 لأن هذا الفضاء يملك القاعدة x^5 , x^4 , x^3 , x^2 , x , 1.

(٥). قياس الفضاء الشعاعي R^4 يساوي 4 لأن هذا الفضاء يملك القاعدة:

$$e_1=(1,0,0,0)\ ,\ e_2=(0,1,0,0)\ ,\ e_3=(0,0,1,0)\ ,\ e_4=(0,0,0,1)$$

السؤال التاسع: أيّ من المجموعات الجزئية التالية هي فضاءات شعاعية جزئية وأيّ منها ليست فضاءات شعاعية جزئية.

(1). $W=\{\ (a,b,c)\in R^3\ ;\ a=b=c\ \}$

(2). $W=\{\ (a,b,c)\in R^3\ ;\ b=0\ \}$

(3). $W=\{\ (a,b,c)\in R^3\ ;\ a=2c\ \}$

(4). $W=\{\ (a,b,c)\in R^3\ ;\ a+b+c=0\ \}$

(5). $W=\{\ A\in M_n(R)\ ;\ A^T=A\ \}$

Scanned by CamScanner

$W=\{\ A\in M_n(R)\ ;\ AB=BA\ ;\ B\in M_n(R)\}$.(6)

$W=\{\ A\in M_n(R)\ ;\ |A|=0\ \}$.(7)

$W=\{\ A\in M_n(R)\ ;\ A^2=A\ \}$.(8)

(9). W كل كثيرات الحدود $h(x)$ من الفضاء الشعاعي $R[x]$ والتي معاملات كل منها هي أعداد صحيحة .

(10). W كل كثيرات الحدود $h(x)$ من الفضاء الشعاعي $R[x]$ والتي لمي كل منها الحد الثابت a_0 هو عدد حقيقي موجب .

الجواب: حتى تكون أيّ مجموعة من المجموعات السابقة فضاءً شعاعياً جزئياً يجب أن يتحقق الشرطان:

1). $\forall w_1\ ,\ w_2\in W \Rightarrow w_1+w_2\in W$

2). $\forall\alpha\in R\ ,\forall w\in W \Rightarrow \alpha.w\in W$

(1). فمن أجل المجموعة $W=\{\ (a,b,c)\in R^3\ ;\ a=b=c\ \}$ نجد أنها فضاء شعاعي جزئي في الفضاء الشعاعي R^3 لأن:

1). $\forall w_1\ ,\ w_2\in W \Rightarrow$

$w_1=(a_1,b_1,c_1)\ ;\ a_1=b_1=c_1\quad ,\quad w_2=(a_2,b_2,c_2)\ ;\ a_2=b_2=c_2 \Rightarrow$

$w_1+w_2=(a_1+a_2\ ,\ b_1+b_2\ ,\ c_1+c_2)\in W$

لأن $a_1+a_2=b_1+b_2=c_1+c_2$.

2). $\forall\alpha\in R\ ,\forall w\in W \Rightarrow$

$\alpha\in R\ ,\ w=(a,b,c)\ ;a=b=c \Rightarrow$

$\alpha.w=(\alpha a\ ,\ \alpha b\ ,\alpha c)\in W$

لأن $\alpha a=\alpha b=\alpha c$.

(2). ومن أجل المجموعة $W=\{\ (a,b,c)\in R^3\ ;\ b=0\ \}$ نجد أنها فضاء شعاعي جزئي في الفضاء الشعاعي R^3 لأن:

1). $\forall w_1\ ,\ w_2\in W \Rightarrow$

$w_1=(a_1,b_1,c_1)\ ;\ b_1=0\quad ;\quad w_2=(a_2,b_2,c_2)\ ;\ b_2=0 \Rightarrow$

$w_1+w_2=(a_1+a_2\ ,\ b_1+b_2\ ,\ c_1+c_2)\in W$

لأن $b_1+b_2=0$.

2). $\forall \alpha \in R\ , \forall w \in W \Rightarrow$

$\alpha \in R\ ,\ w=(a,b,c)\ ; b=0 \Rightarrow$

$\alpha.w=(\alpha a\ ,\ \alpha b\ ,\alpha c) \in W$

لأن $\alpha b=0$.

(2,3,4)

(3). ومن أجل المجموعة $W=\{\ (a,b,c)\in R^3\ ;\ a=2c\ \}$ نجد أنها فضاء شعاعي جزئي في الفضاء الشعاعي R^3 لأن:

1). $\forall w_1\ ,\ w_2 \in W \Rightarrow$

$w_1=(a_1,b_1,c_1)\ ;\ a_1=2c_1\ ,\ w_2=(a_2,b_2,c_2)\ ;\ a_2=2c_2 \Rightarrow$

$w_1+w_2=(a_1+a_2\ ,\ b_1+b_2\ ,\ c_1+c_2)\in W$

لأن $a_1+a_2=2(c_1+c_2)$.

2) α.w ⊃ w

2). $\forall \alpha \in R\ , \forall w \in W \Rightarrow$

$\alpha \in R\ ,\ w=(a,b,c)\ ; a=2c \Rightarrow$

$\alpha.w=(\alpha a\ ,\ \alpha b\ ,\alpha c) \in W$

لأن $\alpha a=2\alpha c$.

(4). من أجل المجموعة $W=\{\ (a,b,c)\in R^3\ ;\ a+b+c=0\ \}$ نجد أنها فضاء شعاعي جزئي في الفضاء الشعاعي R^3 لأن:

1). $\forall w_1\ ,\ w_2 \in W \Rightarrow$

$w_1=(a_1,b_1,c_1)\ ;\ a_1+b_1+c_1=0\ ,\ w_2=(a_2,b_2,c_2)\ ;\ a_2+b_2+c_2=0 \Rightarrow$

$w_1+w_2=(a_1+a_2\ ,\ b_1+b_2\ ,\ c_1+c_2)\in W$

لأن $a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2=0$.

2). $\forall \alpha \in R\ , \forall w \in W \Rightarrow$

$\alpha \in R\ ,\ w=(a,b,c)\ ; a+b+c=0 \Rightarrow$

$\alpha.w=(\alpha a\ ,\ \alpha b\ ,\alpha c) \in W$

لأن $\alpha a+\alpha b+\alpha c=0$.

(5). أما من أجل المجموعة $W=\{ A\in M_n(R) ;\ A^T = A \}$ (وهي مجموعة كل المصفوفات المربعة من المرتبة n المعرفة فوق الحقل R والمتناظرة) فنجد أنها فضاء شعاعي جزئي في الفضاء الشعاعي $M_n(R)$ لأن:

1). $\forall A_1 , A_2 \in W \Rightarrow$

$A_1^T = A_1 \ , \ A_2^T = A_2$

بالتالي نجد أن:

$$(A_1 + A_2)^T = A_1^T + A_2^T = A_1 + A_2$$

أي أن:

$$(A_1 + A_2)^T = A_1 + A_2$$

ما يعني أن $A_1 + A_2 \in W$:

2). $\forall \alpha \in R ;\ \forall A \in W \Rightarrow$

$\alpha \in R \ , \ A^T = A$

بالتالي نجد أن:

$$(\alpha . A)^T = \alpha . A^T = \alpha . A$$

اي أن:

$$(\alpha . A)^T = \alpha . A$$

ما يعني أن $\alpha A \in W$.

(6). أما من أجل المجموعة $W=\{ A\in M_n(R) ;\ AB = BA \ ;\ B\in M_n(R)\}$ (وهي مجموعة كل المصفوفات المربعة من المرتبة n المعرفة فوق الحقل R والمتبادلة مع مصفوفة ما B من $(M_n(R))$. فنجد أنها فضاء شعاعي جزئي في الفضاء الشعاعي $M_n(R)$ لأن:

1). $\forall A_1 ; A_2 \in W \Rightarrow$

$A_1 B = BA_1 \ , \ A_2 B = BA_2$

بالتالي نجد أن:

$$(A_1 + A_2) B = A_1 B + A_2 B = BA_1 + BA_2 = B(A_1 + A_2)$$

أي أن:

$$(A_1 + A_2) B = B(A_1 + A_2)$$

ما يعني بالتالي أن $A_1 + A_2 \in W$.

$2).\ \forall \alpha \in R\ ,\ \forall A \in W \Rightarrow$

$\alpha \in R\ ,\ AB = BA \qquad \Rightarrow$

$$(\alpha A)B = \alpha . AB = \alpha . BA = B(\alpha A)$$

اي أن:

$$(\alpha A)B = B(\alpha A)$$

ما يعني بالتالي أن $\alpha A \in W$.

(7). أما من أجل المجموعة $W = \{\ A \in M_2(R)\ ;\ |A| = 0\ \}$ (وهي مجموعة كل المصفوفات المربعة من المرتبة الثانية المعرفة فوق الحقل R والتي معين كل منها يساوي الصفر) فنجد أنها ليست فضاء شعاعياً جزئياً في الفضاء الشعاعي $M_2(R)$ لأن حاصل جمع مصفوفتين مربعتين من المرتبة الثانية ، معين كل منهما يساوي الصفر، ليس بالضرورة أن يكون مصفوفة مربعة من المرتبة الثانية ومعينها يساوي الصفر، وكمثال على ذلك لنأخذ المصفوفتين:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

والتي معين كل منهما يساوي الصفر ، في حين أن مجموعهما وهو المصفوفة:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

والتي معينها لا يساوي الصفر. ما يعني أن $A + B \notin W$ اي أن الشرط الأول من شرطي الفضاء الشعاعي الجزئي غير محقق على هذه المجموعة.

(8). أما من أجل المجموعة $W = \{\ A \in M_n(R)\ ;\ A^2 = A\ \}$ فنجد أنها ليست فضاءً شعاعياً جزئياً في الفضاء الشعاعي $M_n(R)$ لأن:

$1).\ \forall A_1\ ,\ A_2 \in W \Rightarrow$

$A_1^2 = A_1\ ,\ A_2^2 = A_2 \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned}(A_1 + A_2)^2 &= (A_1 + A_2).(A_1 + A_2) \\ &= A_1^2 + A_1.A_2 + A_2.A_1 + A_2^2 \\ &= A_1 + A_1.A_2 + A_2.A_1 + A_2\end{aligned}$$

اي أن:

$$(A_1 + A_2)^2 \neq A_1 + A_2$$

ما يعني أن $A_1 + A_2 \notin W$ ، اي أن الشرط الأول من شرطي الفضاء الشعاعي الجزئي غير محقق على هذه المجموعة.

(9). أما المجموعة W والتي هي مجموعة كل كثيرات الحدود التي معاملات كل منها أعداد صحيحة فهي ليست فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء الشعاعي $R[x]$ وذلك لأن الشرط الثاني من شرطي الفضاء الشعاعي الجزئي غير محقق على هذه المجموعة . فمثلاً لو أخذنا من هذه المجموعة كثير الحدود التالي:

$$h(x) = 3x^3 + 5x - 12$$

والذي معاملاته أعداد صحيحة . فإذا ضربنا هذا الكثير الحدود بالعدد الحقيقي $\frac{1}{2}$ ، مثلاً، فنحصل على كثير الحدود التالي:

$$\frac{1}{2}h(x) = \frac{3}{2}x^3 + \frac{5}{2}x - 6$$

والذي معاملاته ليست كلها أعداداً صحيحة ، ما يعني أن:

$$\frac{1}{2}h(x) \notin W$$

(10). وأما المجموعة W ، والتي هي مجموعة كل كثيرات الحدود التي في كل منها الحد الثابت هو عدد حقيقي موجب ، فهي ليست فضاءً شعاعياً جزئياً من الفضاء الشعاعي $R[x]$ وذلك لأن الشرط الثاني من شرطي الفضاء الشعاعي الجزئي غير محقق على هذه المجموعة . فمثلاً لو أخذنا من هذه المجموعة كثير الحدود التالي:

$$h(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 8$$

والذي حده الثابت هو العدد الحقيقي الموجب $(+8)$. فإذا ضربنا هذا الكثير الحدود بالعدد الحقيقي (-1) ، مثلاً، فنحصل على كثير الحدود التالي:

$$(-1).h(x) = -3x^3 - 2x^2 + 5x - 8$$

والذي حده الثابت هو (-8) ، ما يعني أن:

$$(-1).h(x) \notin W$$

السؤال العاشر: بيّن ما إذا كان:

(1). الجملة $v_1 = (1,5)$, $v_2 = (2,-3)$ قاعدة الفضاء الشعاعي R^2.

(2). الجملة $v_1 = (1,5)$, $v_2 = (-2,-10)$ قاعدة الفضاء الشعاعي R^2.

(3). الجملة $v_1 = (1,5,-1)$, $v_2 = (2,9,3)$, $v_3 = (-2,-3,1)$ قاعدة الفضاء الشعاعي R^3.

(4). الجملة $v_1 = (1,5-1)$, $v_2 = (-2,9,-4)$, $v_3 = (3,-4,3)$ قاعدة الفضاء الشعاعي R^3.

(5). الجملة $v_1 = (1,5-1,1)$, $v_2 = (-2,9,-4,1)$, $v_3 = (3,-4,3,2)$, $v_4 = (1,1,1,1)$ قاعدة الفضاء الشعاعي R^4.

(6). الجملة $v_1 = (1,-5,-1,3)$, $v_2 = (-2,9,4,2)$, $v_3 = (3,14,3,5)$ قاعدة الفضاء الشعاعي R^4.

الجواب:

(1). حتى تكون الجملة $v_1=(1,5)$ ، $v_2=(2,-3)$ قاعدة للفضاء الشعاعي R^2 يكفي أن نبرهن أن هذه الجملة مستقلة خطياً لأن عدد أشعة هذه الجملة يساوي قياس الفضاء الشعاعي R^2 ويساوي 2 .

من أجل ذلك نستبدل هذين الشعاعين بمصفوفة سطرها الأول هو مركبات الشعاع الأول وسطرها الثاني مركبات الشعاع الثاني، وبعد ذلك نحوّل هذه المصفوفة إلى مصفوفة متدرجة باستخدام التحويلات الأولية على أسطرها ، فإذا كان عدد الأسطر غير المعدومة في المصفوفة المتدرجة الناتجة يساوي 2 كانت الجملة مستقلة خطياً ، وإلا كانت الجملة مرتبطة خطياً.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -13 \end{bmatrix}$$

فنجد أن عدد الأسطر غير المعدومة في المصفوفة المتدرجة الناتجة يساوي 2 ، ما يعني أن جملة الأشعة المعطاة $v_1=(1,5)$ ، $v_2=(2,-3)$ هي جملة مستقلة خطياً ، وبالتالي فهي قاعدة للفضاء الشعاعي R^2 .

ملاحظة: كان بالإمكان أن نستنتج مباشرة بأن هذه الجملة مستقلة خطياً كونها مكونة من شعاعين غير متناسبين في الفضاء الشعاعي R^2 .

(2). بنفس الطريقة السابقة وحتى تكون الجملة $v_1=(1,5)$, $v_2=(-2,-10)$ قاعدة للفضاء الشعاعي R^2 يجب أن تكون هذه الجملة مستقلة خطياً . وبالنظر إلى هذه الجملة نرى أنها مكونة من شعاعين متناسبين في الفضاء الشعاعي R^2 ، حيث أن $v_1=-2v_2$ ، وبالتالي فإن هذين الشعاعين يشكلان جملة مرتبطة خطياً ما يعني أنهما لا يشكلان قاعدة للفضاء الشعاعي R^2 .

(3). الجملة $v_1=(1,5,-1)$, $v_2=(2,9,-1)$, $v_3=(-2,-3,1)$ تكون قاعدة للفضاء الشعاعي R^3 فقط إذا كانت مستقلة خطياً وذلك لأن عدد أشعتها يساوي قياس الفضاء الشعاعي R^3 ويساوي 3 .

ومن أجل التحقق مما إذا كانت هذه الجملة مستقلة خطياً أم لا نستعيض عن أشعة هذه الجملة بمصفوفة مركبات أشعة هذه الجملة ونحولها إلى مصفوفة متدرجة باستخدام التحويلات الأولية على أسطرها . فإذا كان عدد الأسطر غير المعدومة في المصفوفة المتدرجة الناتجة يساوي 3 كانت الجملة مستقلة خطياً ، وإلا كانت الجملة مرتبطة خطياً.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 9 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+7r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

فنجد أن عدد الأسطر غير المعدومة في المصفوفة المتدرجة الناتجة يساوي 3 ، ما يعني أن جملة الأشعة المعطاة $v_1=(1,5,-1)$, $v_2=(2,9,-1)$, $v_3=(-2,-3,1)$ هي جملة مستقلة خطياً، وبالتالي فهي قاعدة للفضاء الشعاعي R^3 .

(4). أما من أجل الجملة $v_1=(1,5,-1)$, $v_2=(-2,9,-4)$, $v_3=(3,-4,3)$ فندرس المسألة بنفس أسلوب دراسة الحالات السابقة. أي وحتى تكون هذه الجملة قاعدة للفضاء الشعاعي R^3 يجب أن تكون مستقلة خطياً.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ -2 & 9 & -4 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 19 & -6 \\ 0 & -19 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & 19 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ولأن عدد الأسطر غير المعدومة في المصفوفة المتدرجة الناتجة يساوي 2 ، فإن جملة الأشعة المعطاة : $v_1=(1,5-1)$, $v_2=(-2,9,-4)$, $v_3=(3,-4,3)$ هي جملة مرتبطة خطياً، وبالتالي فهي ليست قاعدة الفضاء الشعاعي R^3.

(5). ومن أجل أن تكون الجملة $v_1=(1,5-1,1), v_2=(-2,9,-4,1), v_3=(3,-4,3,2), v_4=(1,1,1,1)$ قاعدة للفضاء الشعاعي R^4 يكفي أن نبرهن على أنها مستقلة خطياً في هذا الفضاء لأن عدد أشعتها يساوي 4 . وهو نفس قياس الفضاء الشعاعي R^4 .

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & -4 & 1 \\ 3 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3-3r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2+2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -6 & 3 \\ 0 & -8 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4-r_2]{r_3+r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 0 & 8 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

وبما أن عدد الأسطر غير المعدومة في المصفوفة المتدرجة يساوي 4 ، فإن جملة الأشعة :

$v_1=(1,5-1,1), v_2=(-2,9,-4,1), v_3=(3,-4,3,2), v_4=(1,1,1,1)$

هي جملة مستقلة خطياً في الفضاء الشعاعي R^4 ، وبالتالي فهي قاعدة لهذا الفضاء.

(6). أما الجملة $v_1=(1,-5,-1,3)$, $v_2=(-2,9,4,2)$, $v_3=(3,14,3,5)$ فهي لا يمكن أن تكون قاعدة الفضاء الشعاعي R^4 لأن عدد أشعة هذه الجملة ، والذي يساوي 3 ، أصغر من قياس R^4 ، والذي يساوي 4 ، وذلك بناء على المبرهنة التي تنص على أن عدد أشعة قاعدة فضاء شعاعي ما يساوي قياس هذا الفضاء الشعاعي.

السؤال الحادي عشر: أوجد قياس وقاعدة كل من الفضاءات الشعاعية الجزئية التالية:

(1). W فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي R^2 ومولد بالجملة $v_1=(2,1)$, $v_2=(1,-3)$.

(2). W فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي R^2 ومولد بالجملة $v_1=(1,-2)$, $v_2=(-2,4)$.

(3). W فضاء شعاعي جزئي من الفضاء R^3 ومولد بالجملة $v_1=(2,1,-1)$, $v_2=(3,1,-3)$, $v_3=(-1,0,2)$.

(4). W فضاء شعاعي جزئي من الفضاء R^4 ومولد بالجملة:

$$v_1=(1,-5,-1,3)\ ,\ v_2=(-2,9,4,2)\ ,\ v_3=(3,14,3,5)$$

الجواب:

تمهيد هام: لمعرفة قياس وقاعدة فضاء شعاعي من خلال جملة مولدة له، نبحث ضمن الجملة المولدة عن أكبر جملة مستقلة خطياً فيها، فيكون عدد أشعة هذه الجملة هو قياس الفضاء الشعاعي بالإضافة إلى أن أشعة هذه الجملة تكون هي قاعدة الفضاء الشعاعي.

ولإيجاد أكبر جملة مستقلة خطياً ضمن الجملة المولدة للفضاء الشعاعي نستبدل الجملة المولدة بمصفوفة مركبات أشعتها ونحولها بعد ذلك إلى مصفوفة متدرجة باستخدام التحويلات الأولية على أسطرها، ويكون عندئذ عدد الأسطر غير المعدومة في المصفوفة المتدرجة الناتجة هو عدد أشعة أكبر جملة مستقلة خطياً ضمن الجملة المولدة للفضاء الشعاعي، وبالتالي يكون عدد الأسطر غير المعدومة في المصفوفة المتدرجة الناتجة هو قياس الفضاء الشعاعي، وتكون الأشعة التي تمثلها الأسطر غير المعدومة في المصفوفة المتدرجة هي قاعدة الفضاء الشعاعي.

(1). فمن أجل الفضاء الشعاعي الجزئي W من الفضاء الشعاعي R^2 والمولد بالجملة:

$$v_1=(2,1)\ ;\ v_2=(1,-3)$$

نجد أن هذه الجملة المولدة للفضاء الشعاعي الجزئي W هي جملة مستقلة خطياً، لأنها مكونة من شعاعين غير متناسبين، ولذلك فإن هذه الجملة المولدة لـ W هي نفسها جملة مستقلة خطياً وبالتالي فهي قاعدة له.

إذن فقياس الفضاء الجزئي W يساوي 2، وقاعدة هذا الفضاء الجزئي هي الجملة $v_1=(2,1)$, $v_2=(1,-3)$.

(2). ومن أجل الفضاء الشعاعي الجزئي W من الفضاء الشعاعي R^2 والمولد بالجملة:

$$v_1=(1,-2)\ ,\ v_2=(-2,4)$$

سنعتمد على التمهيد الهام في مقدمة هذا الجواب لإيجاد أكبر جملة مستقلة خطياً ضمن الجملة المولدة السابقة:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2+2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وحسب التمهيد الهام يكون قياس الفضاء الشعاعي الجزئي W يساوي 1، وقاعدته الشعاع v_1 .

(3). أما من أجل الفضاء الشعاعي الجزئي W من الفضاء R^3 والمولد بالجملة:

$$v_1=(-1,0,2)\ ,\ v_2=(3,1,-3)\ ,\ v_3=(2,1,-1)$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2+3r_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+r_2]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ويكون قياس الفضاء الشعاعي الجزئي W المولد بالجملة $v_1=(-1,0,2)$, $v_2=(3,1,-3)$, $v_3=(2,1,-1)$ يساوي 2 ، وقاعدة هذا الفضاء الشعاعي الجزئي هي جملة الشعاعين v_2 و v_1.

(4). استنتاج قياس وقاعدة الفضاء الشعاعي الجزئي W من الفضاء R^4 والمولد بالجملة:

$$v_1=(1,-5,-1,-3)\ ,v_2=(-2,9,4,8)\ ,v_3=(3,-14,3,5)$$

نشكل المصفوفة الموافقة لهذه الجملة :

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & -3 \\ -2 & 9 & 4 & 8 \\ 3 & -14 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2+2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 14 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+5r_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

فنجد أن الجملة الواردة المعطاة هي جملة مستقلة خطياً ، وبالتالي فهي قاعدة الفضاء الجزئي W ما يعني أن قياس هذا الفضاء الجزئي يساوي 3 ، وقاعدته هي الجملة $v_1=(1,-5,-1,-3)$, $v_2=(-2,9,4,8)$, $v_3=(3,-14,3,5)$.

السؤال الحادي عشر: نفرض أن جملة الأشعة W ; u , v جملة مستقلة خطياً في فضاء شعاعي ما V، شعاعه الصفري θ ومعرف فوق حقل عددي K. بيّن ما إذا كانت جملة الأشعة:

$$v_1=v+w\ ,\quad v_2=u\ ,\quad v_3=v+u-w$$

جملة مرتبطة خطياً أم مستقلة خطياً.

الجواب:

نكتب العلاقة العامة للارتباط الخطي الجملة $v_1=v+w$, $v_2=u$, $v_3=v+u-w$:

$$\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3=\theta \Rightarrow$$

$$\alpha_1(v+w)+\alpha_2\, u+\alpha_3(v+u-w)=\theta \Rightarrow$$

$$(\alpha_1+\alpha_3)v+(\alpha_2+\alpha_3)\,u+(\alpha_1-\alpha_3)w=\theta$$

ولأن جملة الأشعة w , u , v جملة مستقلة خطياً ، ينتج من العلاقة الأخيرة أن:

$$\alpha_1+\alpha_3=0$$

$$\alpha_2+\alpha_3=0$$

$$\alpha_1-\alpha_3=0$$

بالحل المشترك لجملة المعادلات السابقة $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$.

ما يعني أن جملة الأشعة $v_1=v+w$, $v_2=u$, $v_3=v+u-w$ جملة مستقلة خطياً :